

**Verkettung
von Kongruenzabbildungen**

Für Interessenten



Datei Nr. 1059

Stand: 3. Oktober 2013

DEMO für www.mathe-cd.de

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text nimmt einige kleinere Themen auf, die eigentlich auch in die anderen Texte passen, die ich in den letzten drei Wochen zum Thema Abbildungen geschrieben habe. Aber sie finden leider im Unterricht kaum mehr Platz. Und vor allem kann man sie nicht unbedingt einer bestimmten Klassenstufe zuordnen, weil sie teilweise etwas anspruchsvoller sind. Und darum geht es:

Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen nennt man auch eine Doppelspiegelung. Das Ergebnis einer solchen Abbildung kann man auch einfacher durch eine einzige Drehung oder Verschiebung erhalten. Umgekehrt kann man jede Drehung oder Verschiebung durch eine Doppelspiegelung ersetzen.

Was passiert, wenn man zwei andere Kongruenzabbildungen nacheinander ausführt? Der Fall zweier Drehungen wurde im Text 11055 und zweier Verschiebungen im Text 11051 bereits besprochen. Wie sieht es aber mit verketteter Drehung und Verschiebung aus?

Oder mit einer Gleitspiegelung (siehe Text 11057) verkettet mit Spiegelung (Seite 25), Drehung oder Verschiebung aus? Dies ist zugegeben eine Frage, die nur Theoretiker interessiert.

Und so kann man dann auch eine Übersicht darüber geben, was überhaupt bei Verkettungen von zwei Kongruenzabbildungen passiert.

Themen, die sich auch gut für Facharbeiten eignen, wenn man sie schon nicht (mehr) im Unterricht unterbringen kann.

Inhalt

1	Doppelspiegelungen	3
1.1	an zwei sich schneidenden Geraden	3
1.2	an orthogonalen Geraden	4
1.3	an parallelen Geraden	5
1.4	Drehungen und Verschiebungen durch Doppelspiegelungen realisieren	8
1.5	Übersicht über Doppelspiegelungen	11
2	Dreifachspiegelungen	12
3.	Wirkung von Verkettungen	19
3.1	Was wir bisher wissen	19
3.2	Verkettung von Drehung und Verschiebung	20
3.3	Restliche Verkettungen	24
3.4	Gilt das Kommutativgesetz?	27

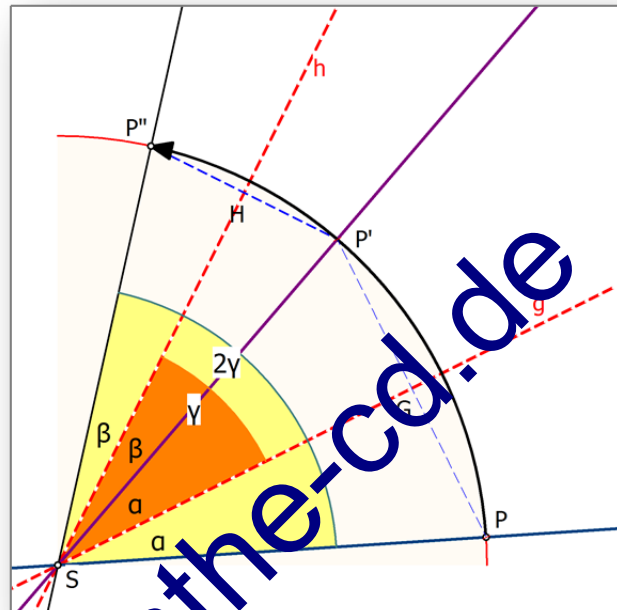
1 Doppelspiegelungen

1.1 Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden

Die Abbildung zeigt die Spiegelung des Punktes A zunächst an der Geraden g nach A', der dann an h nach A'' weiter gespiegelt wird.

Die Doppelspiegelung an zwei sich schneidenden Geraden kann durch eine **Drehung** um den Schnittpunkt der Spiegelungsachsen ersetzt werden.

Dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der entsprechende Schnittwinkel der Achsen.



Der Beweis dafür kann der Darstellung entnommen werden:

Zuerst spiegelt man P an g. Dabei wird das Dreieck PSG auf P'SG gespiegelt. Daher sind die beiden Winkel bei S gleich groß, ich habe sie beide α genannt.

Dann wird P' an h gespiegelt, dabei wird das Dreieck P'SH auf P''SH gespiegelt. Daher sind die beiden Winkel bei S gleich groß, ich habe sie beide β genannt.

Der Winkel zwischen den Spiegelachsen heißt γ . Man erkennt: $\gamma = \alpha + \beta$.

Durch die beiden Spiegelungen sind die Strecken SP, SP' und SP'' gleich lang. Also liegen die Punkte P, P' und P'' auf einem Kreis um S. Daher kann man P auf P'' durch eine Drehung abbilden. Man erkennt, dass der Drehwinkel δ die Größe 2γ hat.

Wenn man die Zeichnung als Hilfsmittel für den Beweis verwendet, muss man beachten, dass es noch eine ganz andere Situation für diese Aufgabenstellung gibt:

Jetzt liegt P im „engen“ Winkelfeld zwischen den Spiegelachsen g und h.

Spiegelt man P an g nach P' und dann weiter an h nach P'', dann gilt wie oben, dass P, P' und P'' auf einem Kreis um S liegen.

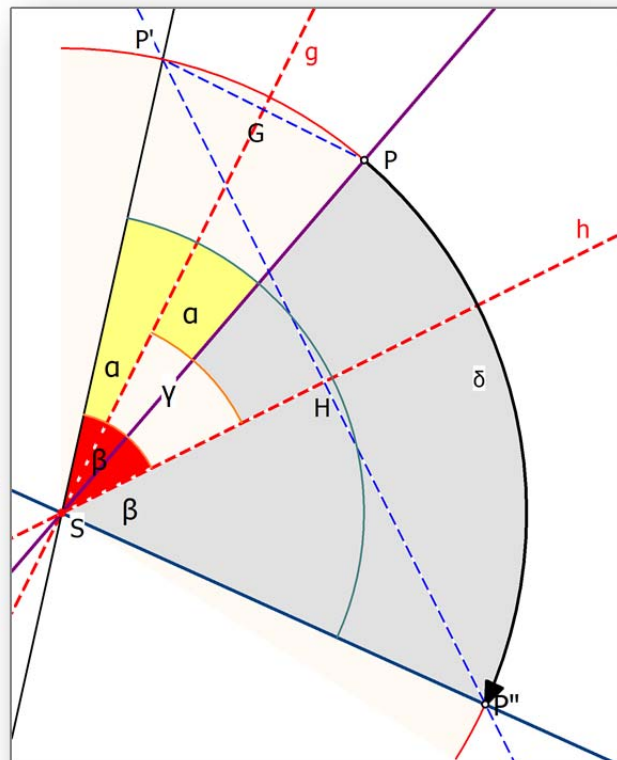
Der kleinere Schnittwinkel zwischen g und h ist hier $\gamma = \beta - \alpha$.

Dreht man P nach P'', müsste man eigentlich gegen den Uhrzeigersinn drehen. Hier ist eine Drehung im Uhrzeigersinn dargestellt.

Für den Drehwinkel kann man ablesen: $\delta = 2\beta - 2\alpha$

Und das heißt $\delta = 2\gamma$.

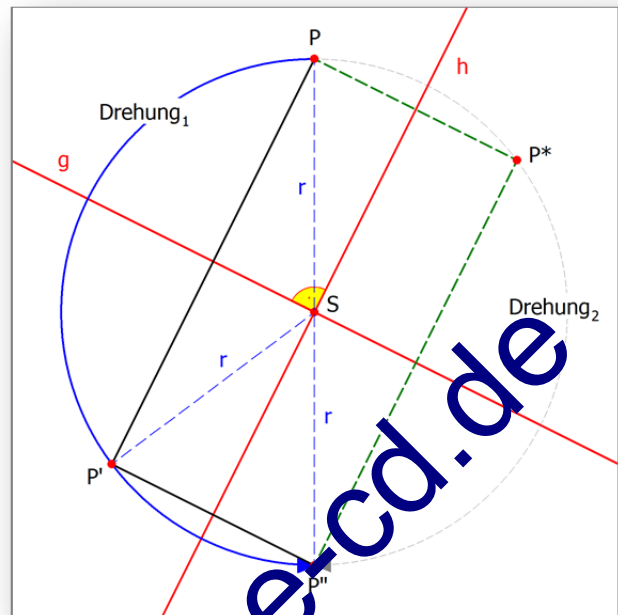
Also gilt diese Winkelbeziehung auch für diesen Fall.



1.2 Spiegelungen an zwei orthogonalen Geraden

Eine Doppelspiegelung an zwei orthogonalen Geraden kann man durch eine Drehung um 180° , also durch eine Punktspiegelung am Schnittpunkt S der Achsen ersetzen.

Dabei spielt die Reihenfolge der Spiegelungen keine Rolle. Dabei ändert sich lediglich der Drehsinn, der letzte Bildpunkt P'' bleibt davon unberührt.



Folgerung zur Symmetrie:

Durch die Konstruktionen hat sich ein Rechteck ergeben, das auf drei Arten symmetrisch ist:

1. Man kann das Rechteck an der Mittelsenkrechten g von PP' auf sich selbst spiegeln.
2. Man kann das Rechteck an der Mittelsenkrechten h von PP'' auf sich selbst spiegeln.

Das bedeutet, dass das Rechteck **achsensymmetrisch zu seinen Mittelsenkrechten** ist.

Die Folgerung daraus:

3. Man kann das Rechteck am Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten auf sich selbst spiegeln.

Das bedeutet, dass das Rechteck **punktsymmetrisch zu seinem Mittelpunkt** ist.

Diese Eigenschaft gilt für alle Figuren:

Ist eine Figur symmetrisch zu zwei orthogonalen Achsen, dann ist es auch punktsymmetrisch zu deren Schnittpunkt.

1.3 Spiegelungen an zwei parallelen Geraden

DEMO für www.mathe-cd.de